

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

40^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

18 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2023

Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{xyz + 1}{x + 1} = \frac{yzw + 1}{y + 1} = \frac{zwx + 1}{z + 1} = \frac{wxy + 1}{w + 1} \\ x + y + z + w = 48 \end{array} \right.$$

Πρόβλημα 2

Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου n , να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους N που είναι τέλεια τετράγωνα και στη δεκαδική τους αναπαράσταση εμφανίζεται n φορές το ψηφίο 2 και μία φορά το 5.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB > AC$, η διχοτόμος του AD , όπου D είναι σημείο της πλευράς BC , και το σημείο I τομής των διχοτόμων του. Αν M είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AD και F είναι το σημείο τομής της MB με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BIC , να αποδείξετε ότι: $AF \perp FC$.

Πρόβλημα 4

Ένα τμήμα της Β' Λυκείου έχει 26 μαθητές, που κάθονται ανά δύο στα θρανία. Στο δεύτερο τετράμηνο έχουν αποφασίσει να αλλάξουν θέσεις ώστε κάθε δύο μαθητές που καθόταν μαζί στο πρώτο τετράμηνο, να μην κάθονται μαζί και στο δεύτερο. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του N , ώστε ανεξαρτήτως από το πώς κάθισαν οι μαθητές στα δύο τετράμηνα, να υπάρχει στο τέλος της χρονιάς ένα σύνολο S από N μαθητές, στο οποίο δεν υπάρχουν δύο μαθητές οι οποίοι κάθισαν μαζί σε κάποιο από τα δύο τετράμηνα.

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!