ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
5 Νοεμβρίου 2021

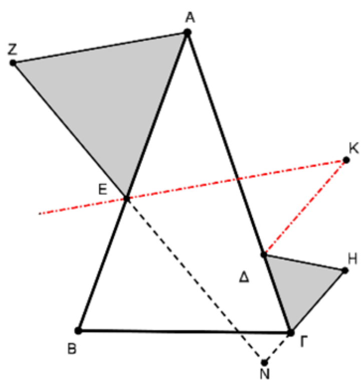
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να βρεθούν οι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι $x=\overline{abc}$ και $y=\overline{cba}$ για τους οποίους ισχύει $0<c<a$ και οι δύο διαιρούνται με το 4 .

(*Σημείωση:* $x=\overline{abc}=100a+10b+c$, $y=\overline{cba}=100c+10b+a$).

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Οι καθηγητές των Μαθηματικών και Φυσικής βαθμολόγησαν για το Α΄ τετράμηνο τους μαθητές ενός Τμήματος του Γυμνασίου τους ως εξής:
Ο καθηγητής των Μαθηματικών έβαλε α φορές το βαθμό 20, β φορές το βαθμό 18, γ φορές το βαθμό 16 και δ φορές το βαθμό 14. Ο καθηγητής της Φυσικής έβαλε α φορές το βαθμό 18, β φορές το βαθμό 16, γ φορές το βαθμό 14 και δ φορές το βαθμό 20. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική. Να προσδιορίσετε τον αριθμό N των μαθητών του Τμήματος, αν δίνεται ότι $20<\mathrm{N}<28$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) και τα τρίγωνα ΑΕΖ, ΔΓΗ είναι ισόπλευρα. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\mathrm{B\hat{E}Z}$ και $\mathrm{A\hat{\Delta}H}$ τέμνονται στο σημείο Κ. Οι προεκτάσεις των ευθύγραμμων τμημάτων ΕΖ και ΓΗ τέμνονται στο σημείο Ν.
Να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathrm{E\hat{K}\Delta}=\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$
(β) $\mathrm{E\hat{N}\Gamma}=120^0-\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$



(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

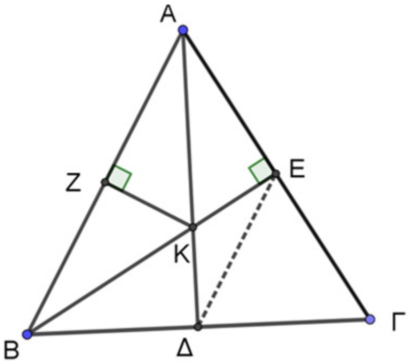
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
5 Νοεμβρίου 2021

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Ο Γιάννης μπορεί να χρησιμοποιήσει απεριόριστες φορές το ψηφίο 9 και ακριβώς μία μόνο φορά το ψηφίο 2 για να γράψει θετικούς ακέραιους. Να βρείτε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο που μπορεί να γράψει ο Γιάννης ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\Sigma = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, το ύψος ΒΕ και η μεσοκάθετη ΖΚ της πλευράς ΑΒ περνούν από το ίδιο σημείο Κ.



(α) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.
(β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ, να αποδείξετε ότι

$$K\Delta = KE = KZ.$$

(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Μία σχολική τάξη έχει συνολικά A μαθητές. Μία μαθήτρια, η Μαρία, αποφασίζει να στείλει ευχετήριες κάρτες στα υπόλοιπα παιδιά της τάξης. Όμως, ξεχνάει να βάλει γραμματόσημο σε $\frac{A}{4}$ από αυτές που είχε ετοιμάσει, οπότε στέλνει τις υπόλοιπες. Από τις υπόλοιπες, λόγω καθυστέρησης του ταχυδρομείου, μόνο το $\frac{1}{10}$ έφτασε στην εγκαίρως. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του A ;

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
5 Νοεμβρίου 2021

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} 5x-2y+\dfrac{3}{2x-6y}=\dfrac{13}{2} \\ (5x-2y)(x-3y)+2=6(x-3y) \end{array}\right\}.$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Να προσδιορίσετε όλους τους τριψήφιους ακέραιους

$$\mathrm{N}=\overline{\alpha 1\beta}=100\alpha+10+\beta,\ \ 0<\alpha<\beta,$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)$, στο οποίο αθροίζουμε όλους τους ακεραίους από τον α μέχρι και τον $\beta+1$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma=\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$. Πάνω στην ευθεία ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{BE}=\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma=\Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{A}$.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
5 Νοεμβρίου 2021

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$2x^3 - 7y^2 + 4z = -4$$

$$2y^3 - 7z^2 + 4x = -4$$

$$2z^3 - 7x^2 + 4y = -4$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Να προσδιορίσετε όλους τους τετραψήφιους ακέραιους

$$\mathrm{N} = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta,\ \ 0 < \alpha < \gamma,$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος

$$(\alpha-1)^2 + \alpha^2 + \cdots + \gamma^2 + (\gamma+1)^2,$$

στο οποίο αθροίζουμε όλα τα τετράγωνα των μη αρνητικών ακεραίων από τον $\alpha - 1$ μέχρι και τον $\gamma + 1$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{B\Gamma}$. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{B}$. Αν η κάθετη στο σημείο Δ προς την ευθεία ΔΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο μέσο της, να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Gamma} = 3 \cdot \mathrm{B\Gamma}$.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
5 Νοεμβρίου 2021

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους το σύστημα:

$$4\alpha^2 = 6\beta^2 + 5\gamma^2 + 25$$
$$13\alpha = 3\beta + 2\gamma + 34.$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(2f(x)+y) = f(f(y)+x)+x. \quad (*)$$

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $z \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(z)=\alpha$ και ότι η f είναι 1-1.

(β) Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f που ικανοποιούν τη σχέση (*).

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ (με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$), εγγεγραμμένο σε κύκλο C με κέντρο O και ακτίνα R. Θεωρούμε τα μέσα $Μ, Κ, Λ$ των πλευρών $ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ$, αντίστοιχα, καθώς και τους κύκλους $C_Μ(Μ, ΜΑ), C_Κ(Κ, ΚΒ), C_Λ(Λ, ΛΓ)$ με κέντρα τα σημεία $Μ, Κ, Λ$ και ακτίνες $ΜΑ, ΚΒ, ΛΓ$, αντίστοιχα, οι οποίοι τέμνουν τον κύκλο C στα σημεία $Δ, Ε, Ζ$, αντίστοιχα. Αν $Τ, Ρ, Σ$ είναι οι ορθές προβολές των κορυφών $Α, Β, Γ$, αντίστοιχα, του τριγώνου $ΑΒΓ$ προς τις απέναντι πλευρές του, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ΔΤ$, $ΕΡ$ και $ΖΣ$ συντρέχουν.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!